

MAI 2 – „dobrovolný“ domácí úkol ze cvičení 6

(výběr příkladů, na kterých si můžete „zkusit“ substituci a také zopakovat integraci racionálních funkcí)

(Najděte primitivní funkce na maximálních otevřených intervalech.)

Integrály, které pomocí vhodných substitucí vedou na integraci racionálních funkcí:

1.
$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx .$$

2.
$$\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx \quad ; \quad \int \frac{1}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x} dx \quad ;$$

a „slepování“ primitivní funkce $\int \frac{2 + \sin x}{2 - \sin x} dx$ nebo $\int \frac{1}{2 + \sin x} dx .$

3. Zkuste dopočítat příklady ze cvičení - integrály typu $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx :$

návod – vhodné substituce:

$a > 0: \sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{a} x \pm t \quad \text{nebo} \quad c > 0: \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + xt \quad (\text{Eulerovy substituce})$

 $a < 0$ a polynom $ax^2 + bx + c$ má dva různé reálné kořeny $\alpha_1 < \alpha_2 :$

pak lze

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{-a} (x - \alpha_1) \sqrt{\frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}} \quad \text{a substituuovat} \quad \sqrt{\frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}} = t \quad \text{nebo}$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{-a} (\alpha_2 - x) \sqrt{\frac{x - \alpha_1}{\alpha_2 - x}} \quad \text{a substituuovat} \quad \sqrt{\frac{x - \alpha_1}{\alpha_2 - x}} = t$$

(a třeba najdete i jiné substituce):

(i)
$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} dx \quad ; \quad \text{(ii)} \quad \int \frac{x}{\sqrt{6 + x - x^2}} dx \quad ;$$

(iii)
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \quad \text{také lze } x = \cosh t \quad \left(\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \text{ a } \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \right)$$

nebo

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}} dx \quad \left(\text{zkuste také } t = \frac{1}{x}, t = 1 + x^2, t = \sqrt{1 + x^2} \text{ nebo } x = \sinh t \right) .$$